

# A study on desuctive completeness of logics and theories

著者	Takano Michio
内容記述	Thesis (Ph.D. in Science)--University of Tsukuba, (B), no. 758, 1992.3.25
発行年	1992
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2241/4983">http://hdl.handle.net/2241/4983</a>

氏 名(本 籍)	高 <sup>たか</sup> 野 <sup>の</sup> 道 <sup>みち</sup> 夫 <sup>お</sup> (神奈川県)
学 位 の 種 類	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	博 乙 第 758 号
学位授与年月日	平成 4 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
審 査 研 究 科	数 学 研 究 科
学 位 論 文 題 目	A Study on Deductive Completeness of Logics and Theories (論理・理論の演繹的完全性に関する研究)
主 査	筑波大学教授 理学博士 本 橋 信 義
副 査	筑波大学教授 理学博士 杉 浦 成 昭
副 査	筑波大学教授 理学博士 中 川 良 祐
副 査	筑波大学教授 理学博士 松 村 睦 豪

## 論 文 の 要 旨

命題を形式的に記号例で表現したものを論理式といい、論理式の間の推論が定義されている形式的体系を考える。このような形式的体系の中の論理式の集まりで、推論に関して閉じているものを、その形式的体系における理論といい、理論のうち、命題記号と述語記号についての代入という操作に関して閉じているものを論理という。

ところで、論理式から論理式を導き出す推論と呼ばれる操作には、統語論的なもの(証明可能性)と意味論的なもの(恒真性)がある。この両者が一致しているとき、もとの形式的体系、あるいは、そこでの理論・論理は演繹的に完全であるという。

本論文においては高野氏は、統語論的に与えられたレスニエフスキーの公理を完全に表現する意味論的な推論を第一部で与え、逆に、第二部と第三部では、意味論的に与えられたルソー型の直観主義多値論理と直観主義ファジー論理に対し、それを完全に表現する統語論的な推論をそれぞれ与えている。そして、最後の第 4 部で順序集合をクリプケモデルの基底として持つ定領域クリプケモデルで定まる論理を統語論的に表現する問題を扱っている。

いま、第一段の述語言語と呼ばれる形式的体系を考える。この体系の論理式の間の意味論的な推論を、順序集合  $M$  を基底としてもつ定領域クリプケモデルにより自然にいれる。(通常の古典論理はこの順序集合として  $0$  だけからなる集合をとればよい。)

このようにして得られた推論を持った形式的体系の論理を  $L(M)$  で表すことにする。

いま、順序集合として、実数全体の作る順序集合  $R$  と有理数全体の作る順序集合  $Q$  をとったとき、 $R$  で定まる論理  $L(R)$  と  $Q$  で定まる論理  $L(Q)$  が同じ論理になるかどうか問題になる。

この問題に対して、高野氏は、この二つの論理を統語論的に完全に表現する公理を見出し、そして、この二つの論理が異なる論理になることを示した。

すなわち：

定理 L(R)は次の二つの公理系

$$\begin{aligned} & \forall x (p \vee P(x)) \supset p \vee \forall x P(x) \\ & (\forall x P(x) \supset \exists x S(x)) \supset \\ & \quad \exists x (P(x) \supset r) \vee \exists x (r \supset S(y)) \end{aligned}$$

で公理化されるのに対して、L(Q)は次の二つの公理系

$$\begin{aligned} & (p \supset q) \vee (q \supset p) \\ & \forall x (p \vee P(x)) \supset p \vee \forall x P(x) \end{aligned}$$

で公理化される。

また、無理数全体が作る順序集合R-Qによる論理L(R-Q)はL(Q)と同じ論理になる。

## 審 査 の 要 旨

形式的体系において、演繹的完全性は最も基本的な要求であり、この要求を満たさない形式的体系が意味を持つことは少ない。

よって、さまざまな要求のもとに導入された形式的体系に対して、その演繹的完全性を示すことは、形式的体系の研究、特に、その形式的体系の上の論理・理論の研究には本質的である。

高野氏により本論文で示された結果は、多値論理、ファジー論理、クリプケモデルによる論理といった形式的体系の今後の研究に重要な貢献をするものと期待できる。

さらに、実数の作る順序集合Rと有理数の作る順序集合Qを基底として構成される定領域のクリプケモデルにより、それぞれ、自然に導入された二つの論理L(R)とL(Q)に関する上記の結果は、多くの専門家の予想を覆す重要な結果であり、国際的にも高い評価を得ている。

よって、著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。